

Tentamen Mechanica, 2 februari 2009, 18.30-21.30 uur

Maak elke opgave op een apart vel

Schrijf je naam en studentnummer op elk vel

$$\text{Cijfer} = \Sigma(\text{punten})/2.9$$

Opgave 1: Bruggetje van Bartlehiem

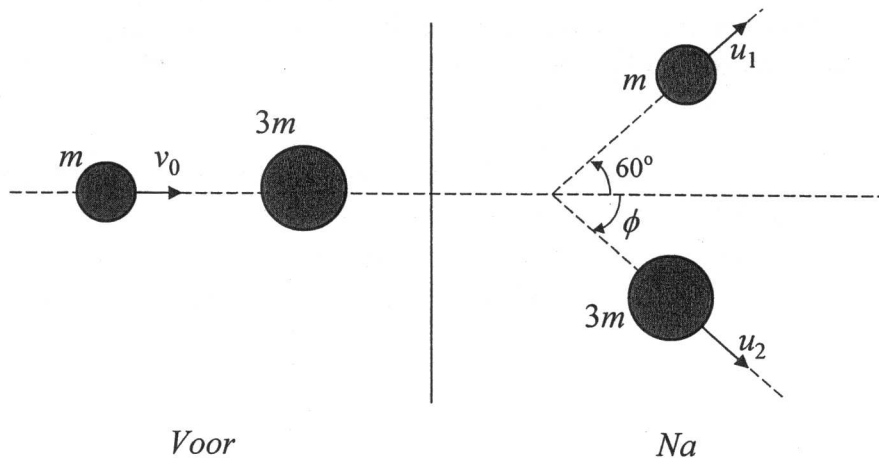
Een jongen en meisje laten vanaf het bruggetje van Bartlehiem gelijktijdig een stalen kogel (soortelijke massa ρ_1 , straal R_1) en een glazen knikker (soortelijke massa ρ_2 , straal R_2) vanuit rust verticaal naar beneden vallen vanaf dezelfde hoogte (afstand H boven het wateroppervlak), waarna de kogel en knikker in het water belanden en naar de bodem zinken. De kinderen vragen zich af welke het eerste de bodem bereikt: de knikker of de kogel. De diepte van het water is D . We analyseren eerst de beweging van de objecten door de lucht. Hierbij verwaarlozen we de luchtweerstand.

- 1p a) Geef de bewegingsvergelijking (Tweede wet van Newton) en bepaal hieruit de snelheid en positie van beide voorwerpen als functie van de tijd.
- 1p b) Op welk tijdstip en met welke snelheid raken de kogel en knikker het wateroppervlak?
- 1p c) Verifieer je antwoord voor de snelheid bij b) door gebruik te maken van behoud van energie.

In het water ondervinden de kogel en knikker een wrijvingskracht F_w die evenredig is met de snelheid: $F_w = -c v$, met c een evenredigheidsconstante die van de straal R en waterviscositeit η afhangt volgens $c = 6\pi\eta R$. Neem aan dat de snelheid van de objecten niet verandert op het moment dat deze het wateroppervlak passeren (hiermee neem je impliciet aan dat de oppervlaktespanning van het water kan worden verwaarloosd).

- 2p d) Geef de bewegingsvergelijking voor de snelheid in het water en bepaal hieruit de tijd als functie van de snelheid.
- 2p e) Bepaal vervolgens de snelheid en positie als functie van de tijd.
- 2p f) Als het water zeer diep is zal een limietsnelheid worden bereikt ver voordat de kogel en de knikker de bodem raken. Op dat moment zijn de krachten op de voorwerpen in evenwicht. Leid hieruit de limietsnelheid af. Verifieer je antwoord door de limiet voor grote tijden te nemen van je antwoord bij e). De soortelijke massa van staal is ongeveer zeven keer zo groot als die van glas. Hoe groot moet de straal van de kogel zijn (relatief ten opzichte van die van de knikker) wil deze eerder de bodem bereiken?

Opgave 2: Elastische botsing

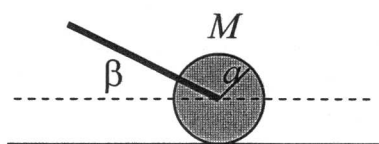


Biljartbal 1 met massa m botst met een snelheid v_0 tegen een stilliggende biljartbal 2 met massa $3m$ (gezien vanuit het laboratorium stelsel). Na de botsing heeft biljartbal 1 een snelheid u_1 en maakt een hoek van 60° met de oorspronkelijke bewegingsrichting. Biljartbal 2 heeft een snelheid u_2 en maakt een hoek ϕ met de oorspronkelijke bewegingsrichting. De botsing kan als puur elastisch worden verondersteld.

- 2p a) Welke behoudswetten gelden er? Schrijf ze uit in termen van m , v_0 , u_1 , u_2 en ϕ .
- 4p b) Bepaal u_1 en u_2 als functie van v_0 .
- 1p c) Bepaal ϕ .
- 1p d) Bepaal de snelheid van het zwaartepunt van het systeem van de twee biljartballen.
- 2p e) Bepaal de hoek die biljartbal 1 maakt met de oorspronkelijke bewegingsrichting gemeten in het zwaartepuntstelsel.

Opgave 3: Wals

Om een stuk grond te effenen wordt een wals gebruikt die met de hand kan worden voortbewogen. De wals bestaat uit een massieve cylinder met massa M en straal a , waaraan een duwbeugel (massa verwaarloosbaar ten opzichte van de cylinder) is bevestigd die aangrijpt op de as waaromheen de cylinder kan draaien (zie figuur). De beugel maakt een constante hoek β met de ondergrond, die als horizontaal mag worden beschouwd. De wals wordt aangeduwd met een constante kracht met grootte F_0 die wijst langs de beugel, naar de as. Wrijving met de lucht en tussen de cylinder en de as mag verwaarloosd worden. De gyradiestraal van de cylinder is $a/\sqrt{2}$. De zwaartekrachtsversnelling wordt aangeduid met g .



- 2p a) Geef in een schets aan welke krachten er op de cylinder werken en waar ze aangrijpen.
- 3p b) Geef de bewegingsvergelijkingen (Tweede wet van Newton) voor translatie en rotatie van de cylinder. Dit zijn in totaal drie vergelijkingen, uit één daarvan kun je direct de normaalkracht oplossen (doe dat).

We beschouwen nu eerst de situatie waarbij de ondergrond zo ruw is dat er een slipvrije rol optreedt.

- 1p c) Wat is de relatie tussen de hoeksnelheid en de translatiesnelheid voor slipvrij rollen?
- 2p d) Bepaal met behulp van je antwoord bij b) en c) de translatieversnelling van de cylinder en ook de translatiesnelheid als functie van de tijd (neem aan dat op $t = 0$ de wals in rust is).

We nemen nu aan dat er slip optreedt tijdens het rollen. De wrijvingscoëfficiënt tussen de rol en de ondergrond is μ .

- 2p e) Bepaal de translatieversnelling en de hoekversnelling van de cylinder. Bepaal hieruit de translatiesnelheid en de hoeksnelheid van de cylinder als functie van de tijd (opnieuw is de wals in rust op $t = 0$).
- 2p f) Bonusvraag Gegeven een bepaalde grootte van F_0 , wat is dan de kritische waarde voor de wrijvingscoëfficiënt, waaronder altijd slip zal optreden?